Revista Electrónica de Didáctica en Educación Superior

Publicación Semestral de Acceso Libre. ISSN: 1853 - 3159

Nro. 15 - Abril 2018

Una propuesta para construir geométricamente el concepto de base en el plano

Gatica, María Andrea; Lusente, María Fernanda;

Cocilova, Ana Inés; Cornejo Endara, Rafael Adrián

Universidad Nacional del Sur (Argentina)

Fecha de recepción: 21/Dic/2017

Fecha de aceptación: 05/Mar/2018

Resumen: En este artículo se presenta una propuesta de enseñanza del tema: vectores, su aspecto geométrico. Se basa en presentar una serie de actividades, a desarrollar por los alumnos, que sirvan para dotar de sentido el concepto de base de un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión dos. El concepto de base, así como otros conceptos que se construyen solidariamente con éste, tales como espacio vectorial, subespacio, dependencia lineal, sistema de generadores, tienen un papel crucial en diferentes disciplinas debido a sus múltiples aplicaciones prácticas.Se exhibe un recorrido a través de tres etapas que emergieron de la realización de un análisis epistemológico así como también las hipótesis de implementación. Las actividades seleccionadas tienen como finalidad poner en tensión las conceptualizaciones de los alumnos, promoviendo un tratamiento espiralado del tema. En cada una de las tareas presentadas se analizan los objetivos y los contenidos matemáticos que se movilizan.

Palabras clave: propuesta de enseñanza, ingeniería didáctica, vectores en el plano, vectores equipolentes, operaciones binarias.

Abstract: In this article we present a proposal to teach the subject: vectors, their geometric aspect. It is based on a series of activities, to be carried out by the students, to give meaning to the concept of a vector-space of dimension 2. This concept (as well as other related concepts such as vector space, subspace, linear dependence, system of generators) have a crucial role in different disciplines due to their many practical applications. A journey through three stages that emerged from the realization of an epistemological analysis as well as the implementation hypothesisis exhibited. The selected activities are designed to put in tension the previous conceptualizations of the students, promoting a spiral treatment of the subject. In each of the tasks presented, the objectives and the mathematical contents that are mobilized are analyzed.

Keywords: teaching proposal, didactic engineering, vectors in the plane, equipollent vectors, binary operations.

Introducción

Como docentes, observamos diariamente las dificultades delos alumnos universitariospara dotar de sentido sus conceptualizaciones acerca del álgebra. La enseñanza tradicional de esta área de la matemática presenta algunos fenómenos que obstaculizan su aprendizaje significativo, tales como el *monumentalismo del saber* (Chevallard, 2013) y la *aritmetización del álgebra* (Bolea, Bosch y Gascón, 2001). En este contexto, muchas veces se crea una ficción de aprendizaje en la que los alumnos se limitan a reproducir ciertas técnicas algorítmicas que el docente enseña. Tal como afirman Oktaç y Trigueros (2010), algunas de las fuentes de obstáculos para el aprendizaje del álgebra lineal provienen de su naturaleza epistemológica, de problemas en los dispositivos didácticos empleados y del uso de diferentes tipos de lenguajes.

Este articulo tiene como finalidad la socialización de dos aspectos que setuvieron en cuenta a la hora de diseñar e implementar un dispositivo didáctico que facilite la construcción geométrica del concepto de base en el plano:

- Un análisis epistemológico del tema que posibilitó reconocer diferentes etapas necesarias para la construcción del concepto, teniendo un especial cuidado con las transposiciones didácticas realizadas.
- La explicitación de objetivos de aprendizaje, de propósitos docentes generales y de las hipótesis de implementación que guiarán las posibles intervenciones docentes.

Fundamentación

Para el diseño de la propuesta de enseñanza se utilizó como marco metodológico la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995).

La potencialidad de esta metodología como herramienta de planificación permite en forma dialéctica:

- analizar en profundidad diferentes aspectos del complejo proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que enriquece a su vez el proceso;
- capitalizar la experiencia docente mediante la confrontación entre las hipótesis de trabajo y los resultados obtenidos como parte de la validación del proceso.

Inspirados en las ideas expuestas por Douady (1995) lejos de pensar que un contenido matemático puede enseñarse en términos tradicionales, consideramos que es nuestra labor el facilitarles a los alumnos el aprendizaje del mismo. ¿Y de qué forma lo facilitamos? Por medio de proponer situaciones que enfrenten al alumno a las diferentes facetas que componen el contenido cuestión del aprendizaje. Estas situaciones deben ser tales que permitan al alumno poner en tensión sus conceptualizaciones.

En esta misma línea de pensamiento entendemos que el aprendizaje de ninguna manera puede considerarse como un proceso lineal sino como un proceso espiralado, en el que el alumno va construyendo su aprendizaje a partir de diferentes situaciones que le dan sentido al contenido en cuestión.

Análisis epistemológico

En los primeros capítulos de la bibliografía básica de un curso de Álgebra Vectorial (Anton 2010, Kozak y otos 2007, Rey Pastor 1941), se presentan geométricamente los vectores en los espacios bidimensional y tridimensional definiendo las nociones de vector fijo y libre. Luego, se muestran cómo se realizan las dos operaciones binarias: *suma entre vectores y producto de un escalar por un vector*, y se establecen propiedades básicas de estas dosoperaciones.Consideramos que el motivo de introducirlos al inicio del curso se debe a que el conjunto de vectores facilita internalizar el concepto abstracto de un espacio vectorial de dimensión dos y tres mediante una visualización geométrica.

Para entender la construcción del concepto de base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión dos y las propiedades que tiene esta estructura algebraica (Hungerford 1996)desarrollamos una práctica basada en las siguientes conceptualizaciones.

Dado el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, el modelopara la construcción geométrica de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión dos consta de las siguientes etapas:

1) Considerar el conjunto $\mathcal{F}$ de todos los vectores del plano, llamados vectores fijos.
2) Definir sobre dicho conjunto $\mathcal{F}$ la relación de equivalencia "*ser equipolente a*", notada con $\equiv$. Así, se tiene automáticamente otro conjunto, llamado conjunto cociente, notado$(\mathcal{F}/\equiv)$;y una aplicación natural $\pi: \mathcal{F} \to (\mathcal{F}/\equiv)$ tal que $\pi(\vec{u}) = [\vec{u}]$ donde $[\vec{u}]=\{\vec{v} \in \mathcal{F} \ : \ \vec{u} \equiv \vec{v}\}$.A la clase de equivalencia del vector $\vec{u}$, notada$[\vec{u}]$se la llama vector libre.
3) Sobre el conjunto cociente $(\mathcal{F}/\equiv)$ se definen una operación binaria interna *suma*, notada +, y una acción del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ sobre $(\mathcal{F}/\equiv)$, notada$\cdot$, tal que la terna $((\mathcal{F}/\equiv), +, \cdot)$ forma un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión dos.

El propósito de la secuencia que proponemos en este trabajoprácticoes que el alumno realice un recorrido implícito, de las etapas arriba mencionadas que mediarán posibilitando la construcción geométrica de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión dos.

Cabe mencionar que la teoría explícita desarrollada por el docente sólo involucrará las nociones de: vector fijo, relación de equivalencia "ser equipolente a", vector libre, suma geométrica entre vectores y producto de un número real por un vector.

Filosofía del diseño

Como parte de la socialización de esta propuesta de enseñanza nos es imperativo explicitar los propósitos docentes y los objetivos de la misma, entendiendo que estos son los pilares que sustentan las actividades y las intervenciones docentes a partir de las cuales se efectivizará la implementación.

Como docentes perseguimos los siguientes propósitos:

- Proponer un tratamiento espiralado de los contenidos de la asignatura.
- Favorecer los procesos metacognitivos en los alumnos, a través de la explicación por escrito de sus resoluciones.
- Evitar obstáculos didácticos que puedan emerger de la redacción de las consignas de las actividades.
-

Se espera que los alumnos logren:

- Identificar en forma gráfica vectores equipolentes.
- Interpretar geométricamente la noción de combinación lineal.
- Construir algunos significados geométricos relacionados con la noción de sistema de generadores y base del plano.

Principios de implementación de la secuencia:

- Ofrecer preguntas en vez de respuestas. La pregunta como motor de aprendizaje. Ofreciendo "buenas preguntas" a nuestros alumnos, enseñamos a formular "buenas preguntas".
- Dar la palabra a los alumnos. Que las voces de la clase sean las de los alumnos. Aprender a guardar silencio.
- Corrernos del lugar de quien posee el saber, y de la responsabilidad de ser quien valida los razonamientos de los alumnos.

- Propiciar que los alumnos puedan explicitar sus conceptualizaciones y que reconozcan su progreso en el aprendizaje de las matemáticas.

Análisis de la propuesta

Las siguientes tareas están a modo de ejemplificación de las que se les proponen a los alumnos. En cada una de ellas se podrá ver el enunciado de la misma, así como también la explicitación del objetivo que se persigue y los contenidos matemáticos que se movilizarían.

A continuación, se presentan las actividades agrupadas según las tres etapas mencionadas en el análisis epistemológico.

Etapa 1

Objetivos de la actividad 1

- Identificar algunos indicios de las conceptualizaciones previas de los alumnos respecto a la noción de vector libre.
- Elaborar en forma conjunta una definición de vector libre.

Actividad 1

a) ¿Cuáles de las siguientes figuras (Fig.1), considera que son vectores? ¿Por qué?
b) Representar geométricamente un vector.
c) Indicar tres palabras relacionadas a la idea de vector.
d) ¿Qué considera que puede ser representado por medio de un vector?

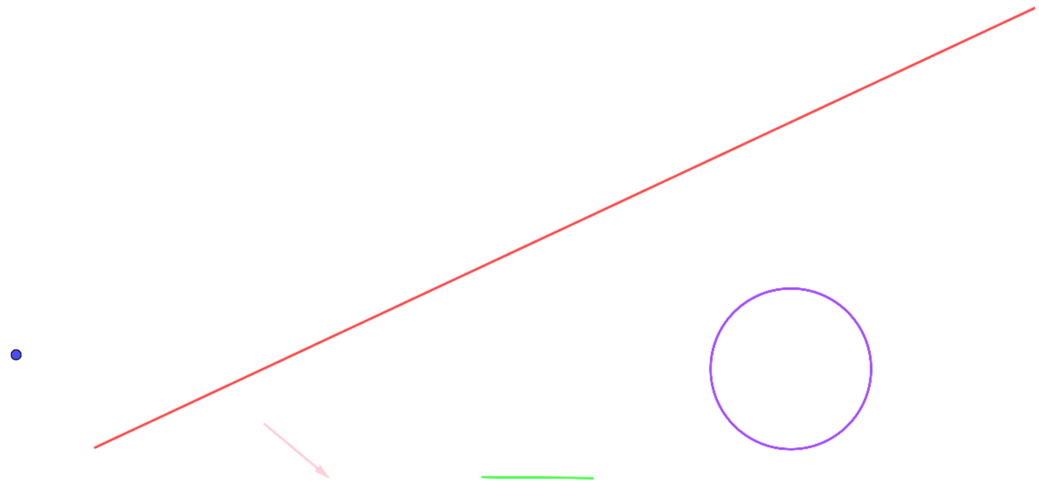

Fig. 1

Etapa 2

Las tareas incluidas en esta etapa movilizan los conceptos de: relación de equivalencia, pertenencia a una misma clase de equivalencia, representante adecuado de una clase de equivalencia, dando así origen a la noción de conjunto cociente módulo una relación de equivalencia.

Objetivos de la actividad 2

- Identificar y clasificar vectores equipolentes.
- Distinguir elementos de una misma clase de equivalencia y elegir o construir un representante conveniente.
- Reconocer algunos indicios de las posibles conceptualizaciones de los alumnos acerca de la relación de equivalencia: “ser equipolente a”.

Actividad 2

a) Dada la siguiente figura (Fig. 2) agrupar los vectores equipolentes.
b) Dado el punto P, dibujar vectores equipolentes a cada uno de ellos con origen en P.

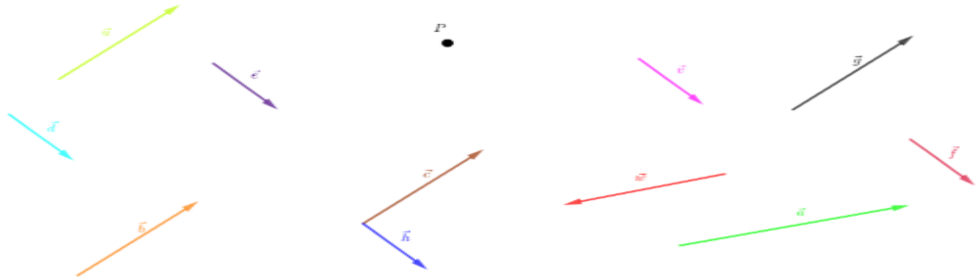

Fig. 2

Actividad 3

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{a}$ (Fig. 3), dibujar tres vectores equipolentes a cada uno de ellos. ¿Podrías dibujar más? En caso afirmativo, indicar, en forma intuitiva, cuántos.

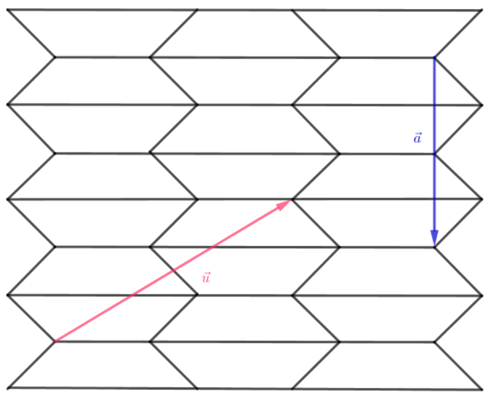

Fig. 3

Objetivos de la actividad 4

- Saber elegir un representante conveniente de una clase de equivalencia dada.
- Fijado el origen, elegir el representante adecuado de la clase de equivalencia.

Actividad 4

Dado el vector $\vec{u}$(Fig. 4) dibujar vectores equipolentes al mismo con origen en el punto A . ¿Cuántos podrías dibujar en este caso?

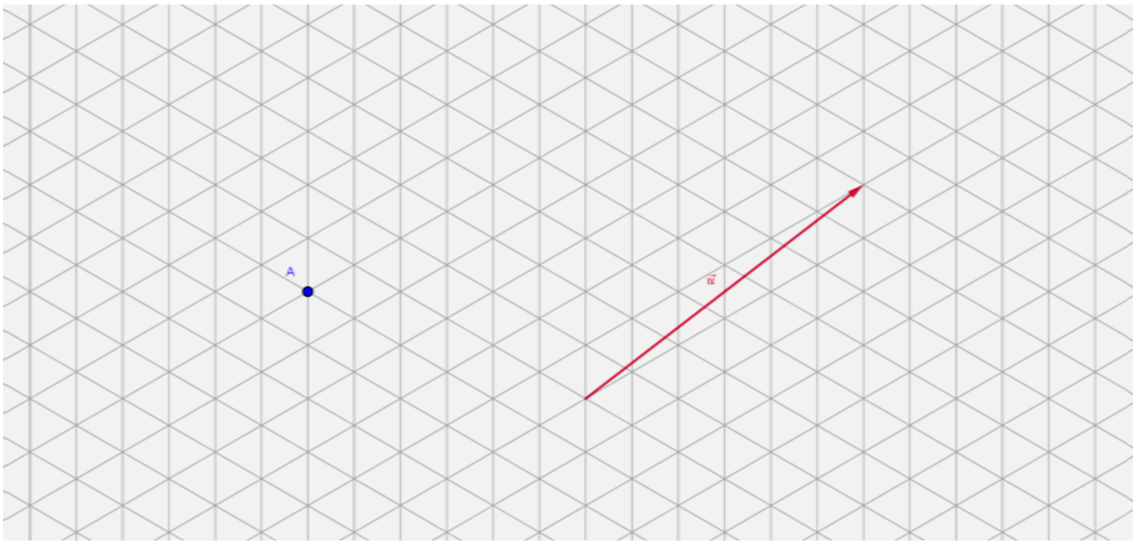

Fig.4

Etapa 3

Las tareas propuestas en esta etapa movilizan los conceptos de operación binaria interna y acción de un cuerpo sobre un conjunto dando origen a la estructura algebraica de un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión dos. También, ponen en juego la noción de conjunto de generadores y base de un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión dos.

Objetivos de la actividad 5

- Sumar geométricamente vectores mediante la regla del paralelogramo.
- Internalizar la operación binaria interna "suma" definida sobre el conjunto cociente de los vectores fijos módulo la relación de equivalencia.
- Reforzar la noción de equipolencia y la idea de representantes de una clase.

Actividad 5

Identificar, si es posible (Fig. 5), los vectores equipolentes al vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Explicar los procedimientos realizados.

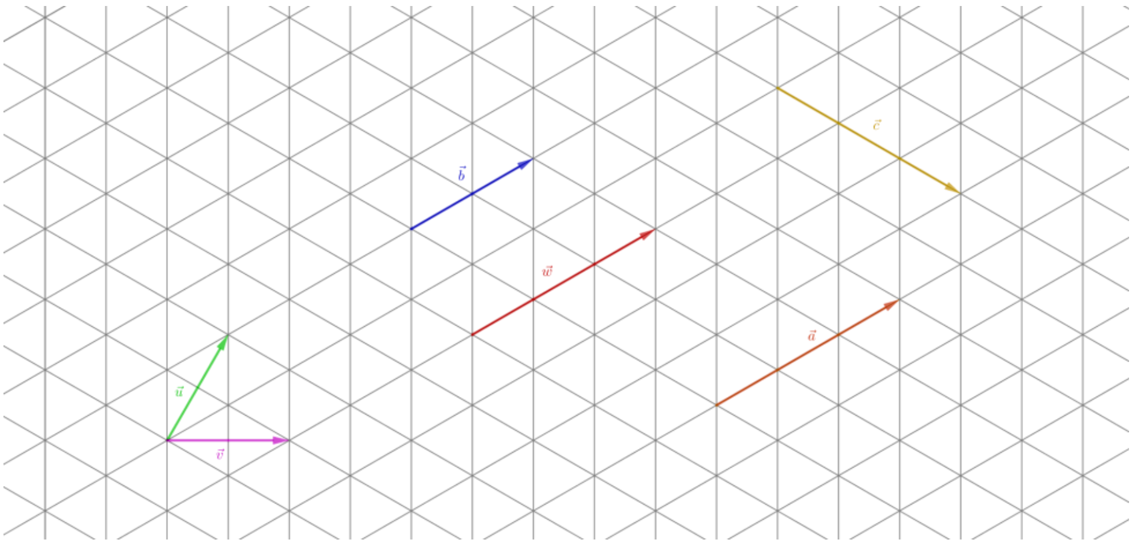

Fig.5

Objetivos de la actividad 6

- Multiplicar geométricamente un escalar por un vector.
- Internalizar la acción del cuerpo de los números reales sobre el conjunto cociente de los vectores fijos módulo la relación de equivalencia.
- Reforzar la noción de equipolencia y la idea de representantes de una clase.

Actividad 6

Identificar, si es posible (Fig. 6), los vectores equipolentes al vector $\vec{r} = \alpha\vec{v}$, con $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Explicar los procedimientos realizados.

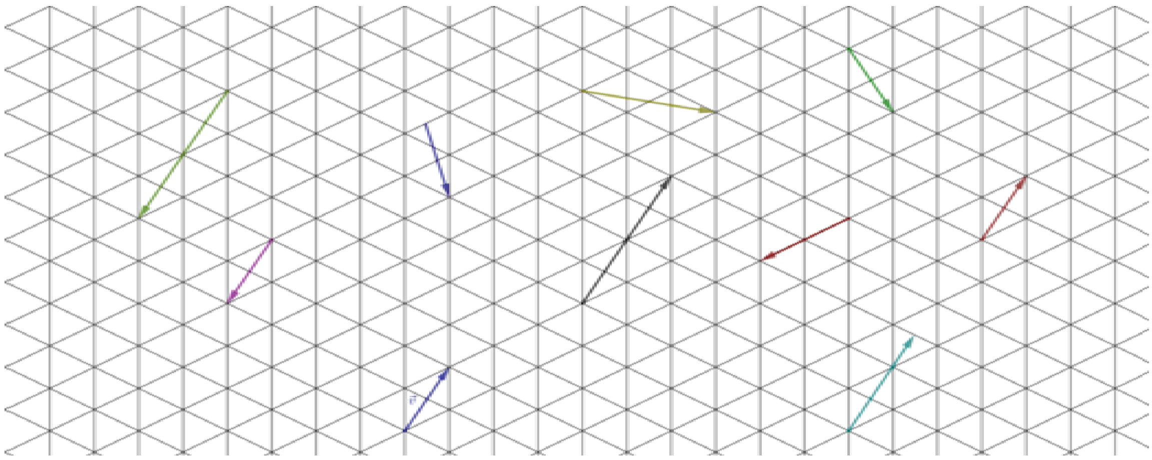

Fig. 6

Objetivos de la actividad 7

- Operar geométricamente en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}/\equiv$.
- Introducir la noción de combinación lineal definida en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Actividad 7

¿Es posible que el vector $\vec{a}$ sea equipolente al vector $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$, para algún par de números reales α y β? Explicar los procedimientos realizados. (Fig. 7)

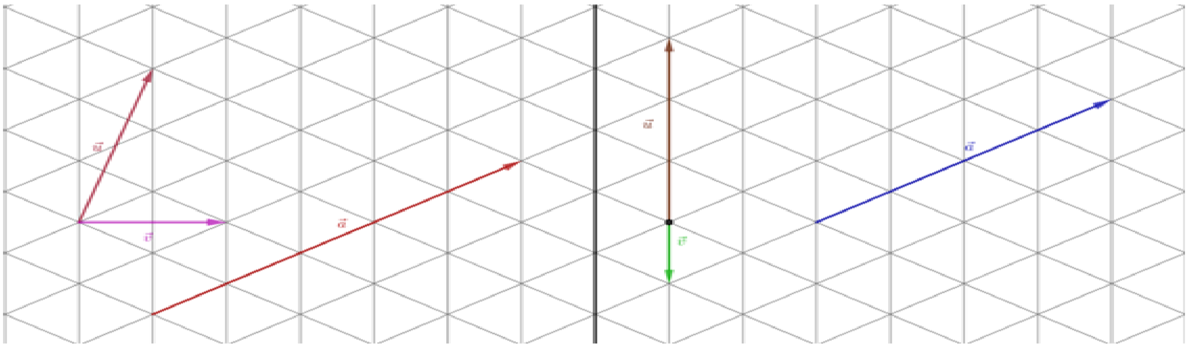

Fig.7

Objetivos de la actividad 8

- Operar geométricamente en el $\mathbb{R}$ −espacio vectorial $\mathcal{F}/\equiv$.
- Introducir la noción de combinación lineal definida en el $\mathbb{R}$ −espacio vectorial $\mathcal{F}/\equiv$.

Actividad 8

A partir de la figura (Fig. 8), responder las siguientes preguntas.Si la respuesta es afirmativa, analizar su unicidad

a) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

b) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

c) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$?

d) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{w}$?

e) ¿Es posible que $\vec{b}$ sea equipolente a una combinación lineal de $\vec{u}$?.

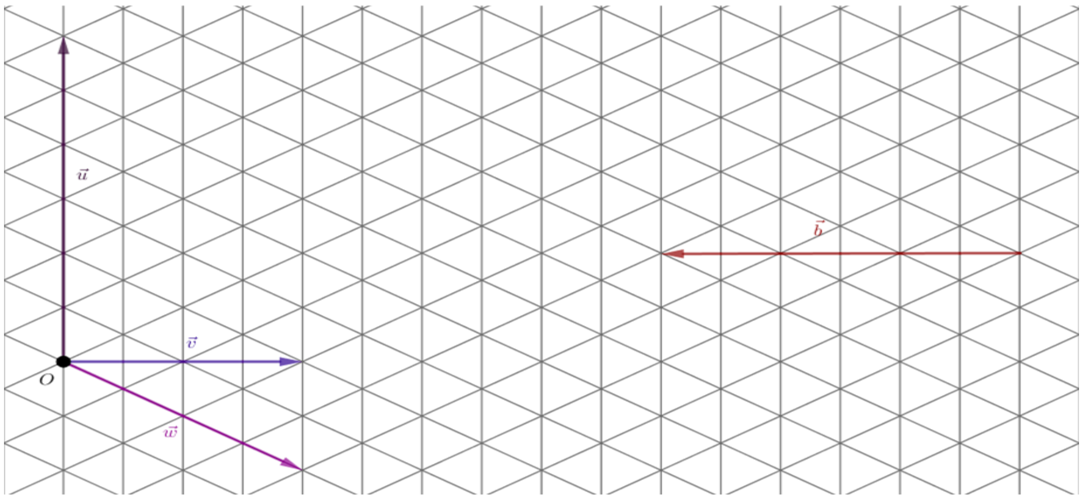

Fig. 8

Objetivos de la actividad 9

- Trabajar en forma geométrica con los vectores en el plano.
- Introducir las nociones de: conjunto de generadores en el plano (inciso a)), sistema de generadores del plano (inciso b)) y base del plano (inciso c)). Además, visualizar las diferentes posibilidades de elegir los representantes convenientes (inciso d)).

Actividad 9

Para cada uno de los siguientes incisos

a) Analizar si es posible escribir los vectores $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ y $\overrightarrow{OP_3}$ como combinación lineal de los vectores de G_1, G_2, G_3 y G_4.

b) Analizar si es posible escribir a cualquier vector $\overrightarrow{OP}$del plano como combinación lineal de los vectores pertenecientes al conjuntoG_1, G_2, G_3 y G_4..

c) Analizar si es posible escribir a cada vector$\overrightarrow{OP}$del plano como combinación lineal de los vectores pertenecientes al conjunto G_1, G_2, G_3 y G_4., de **una única manera.**

i. $G_1 = \{\vec{u}\}$ (Fig. 9)

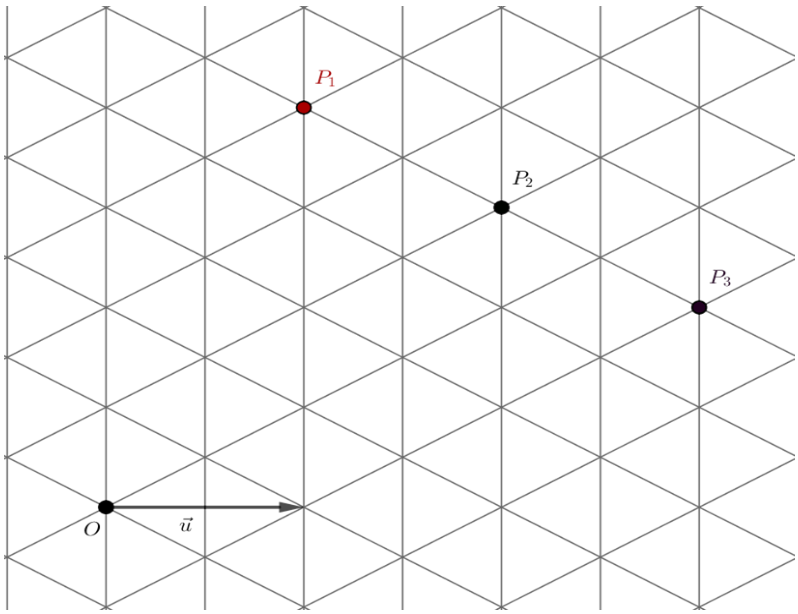

Fig. 9

ii. $G_2 = \{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\}$ (Fig. 10)

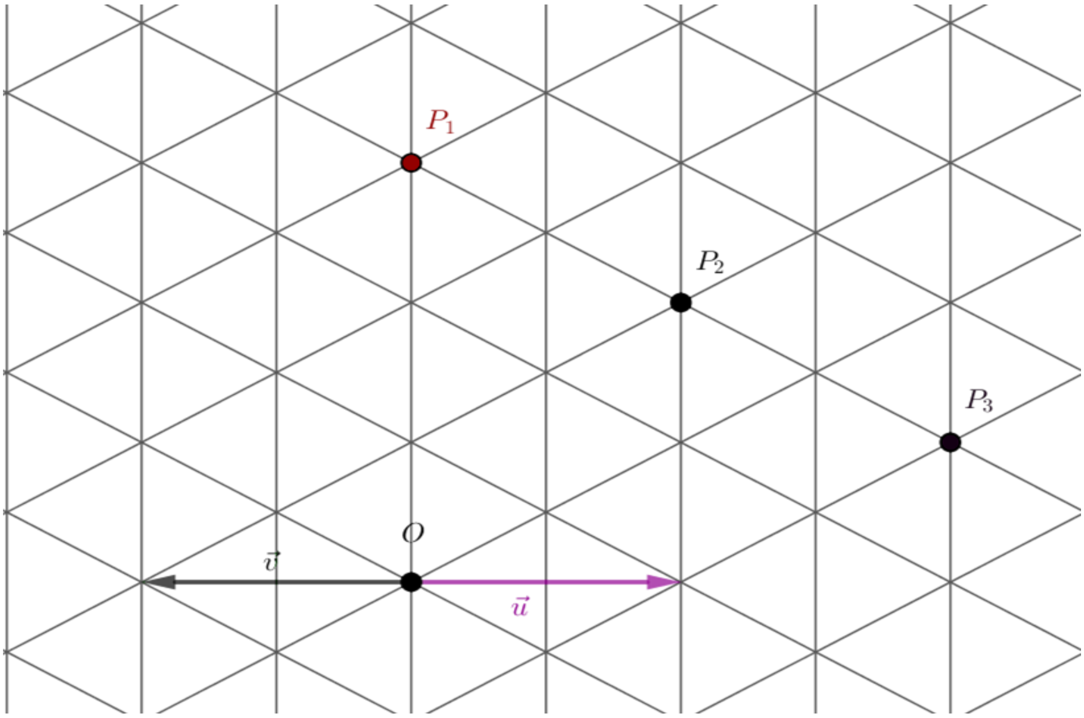

Fig. 10

iii. $G_3 = \{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\}$ (Fig.11)

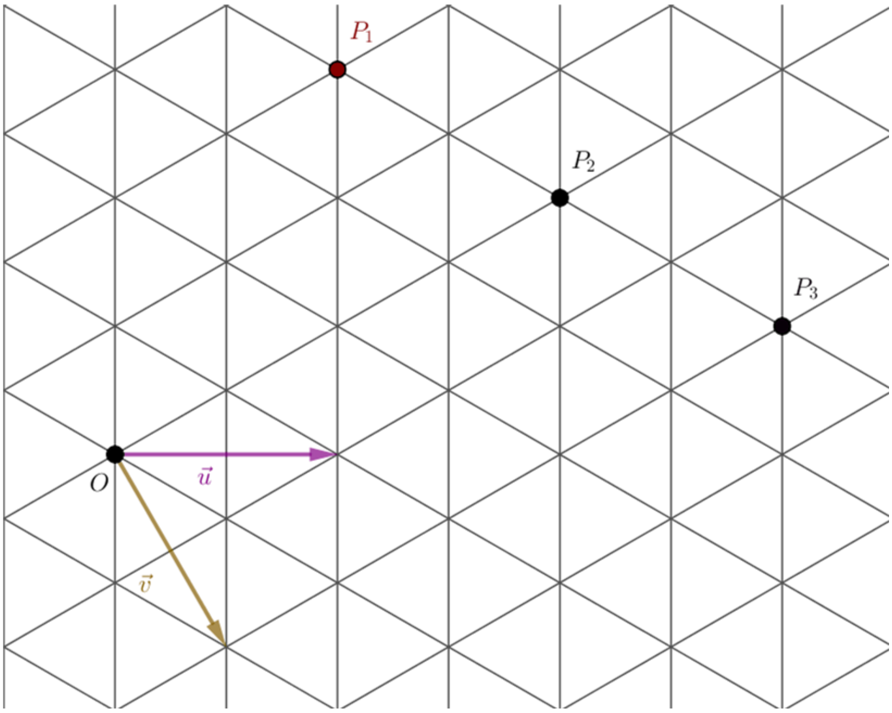

Fig.11

iv. $G_4 = \{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\vec{w}\}$ (Fig. 12)

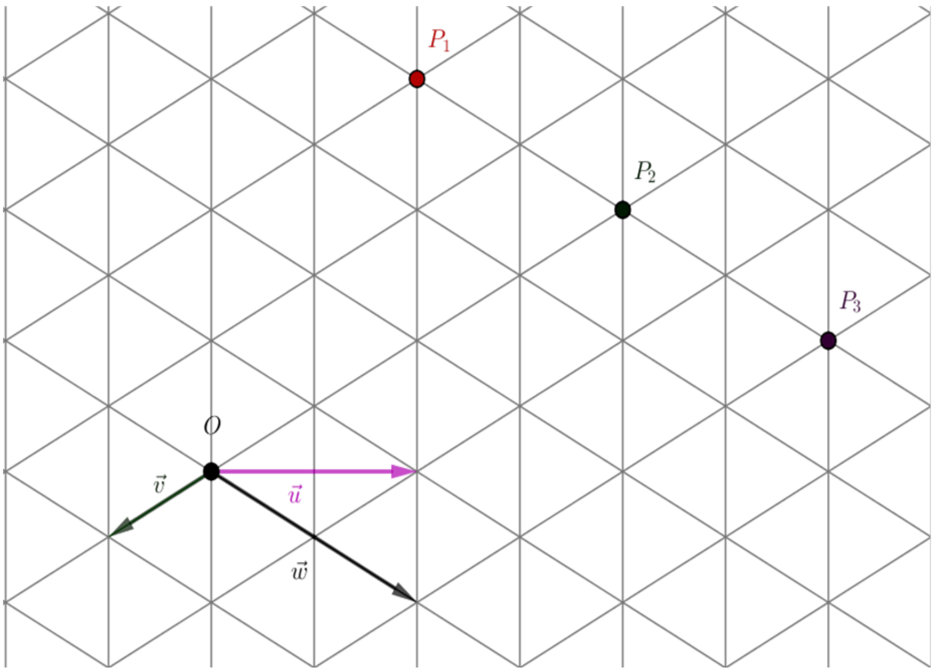

Fig. 12

d) Analizar si es posible, en el siguiente gráfico, escribir al vector $\overrightarrow{AB}$ como combinación lineal de los vectores del conjunto $G = \{\vec{u}, \vec{v}\}$. En caso afirmativo, indicar si es única. (Fig. 13)

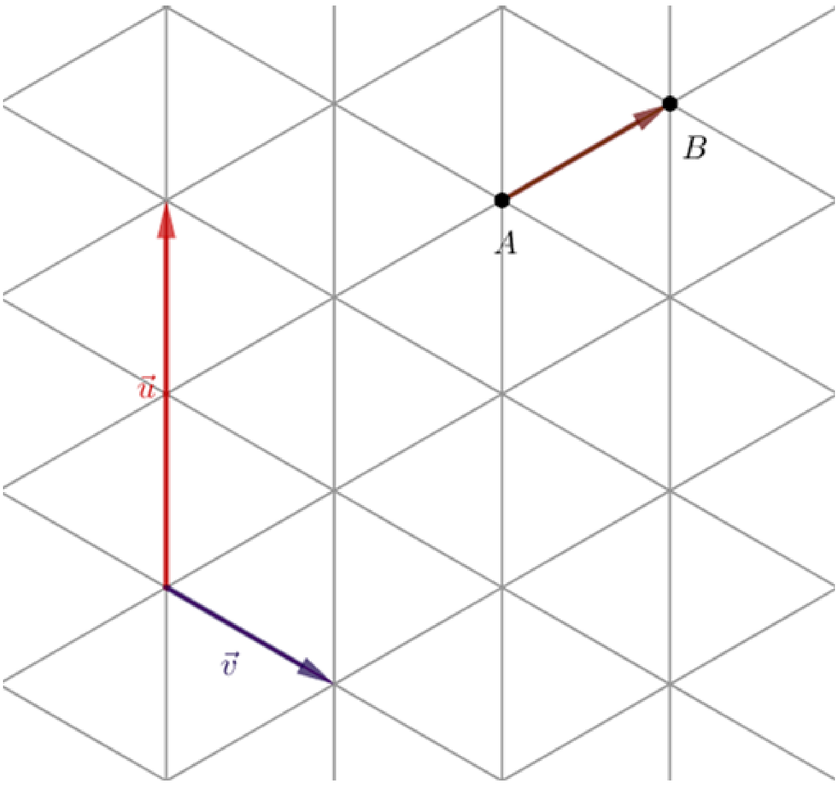

Fig.13

Comentarios finales

La propuesta de este recorrido pretende enfatizar la diferencia entreel conjunto de los vectores fijos del plano$\mathcal{F}$ yel conjunto de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$, la cual a nuestro entender no se deja entrever en la bibliografía que usualmente se utiliza en los cursos introductorios de Álgebra Lineal. Más precisamente, se procura sentar los cimientos necesarios para que los alumnos identifiquen el isomorfismo entre los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $((\mathcal{F}/\equiv), +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Consideramos que el abordaje geométrico desarrollado en esta propuesta permitirá a los alumnos concentrarse en los aspectos algebraicos evitando así la aritmetización de este contenido. En particular, la última actividad propuesta permite visualizar geométricamente las nociones de sistemas de generadores y base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $((\mathcal{F}/\equiv), +, \cdot)$.
Para finalizar adherimos a las palabras del Dr. Santaló: "Hay que tener en cuenta la pedagogía, pero hay que ir educando al alumno en el esfuerzo personal para aprender por su cuenta. Lo importante es poner a su disposición buenos textos, buenas guías y un buen conocimiento de la materia por parte del profesor".

Referencias

Anton, H. (2010). Introducción al álgebra lineal.México: Limusa.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-60). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas. Educación Matemática, 13(3), 22-63.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. Journal of Research in Mathematics Education, 2 (2), 161-182.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gómez, P. (Ed), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 61-96). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Hungerford, T. W. (1996). Algebra. USA:Springer.

Kozak, A.; Pompeya Pastorellli, S. y Vardanega, P.(2007). *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal*. México D.F.:Mc Graw Hill.

Oktaç, A., y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4), 373-385.

Rey, P. (1941). Curso Cíclico de Matemáticas Tomo I. Madrid: Martin Industria Gráfica.